සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது/
All Rights Reserved]

12715

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

ශුද්ධ ගණිතය I
தூய கணிதம் I
Pure Mathematics I

05	
S	I

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න හතකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) A, B යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි සිතමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $(A \cap B) \cup (A' \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = S$ බව ද

(ii) $A = \phi$ ම නම් පමණක් $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = B$ බව ද

සාධනය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල සාධනයේ දී, ඔබ උපයෝගී කරගනු ලබන කුලක වීජයේ නියම ප්‍රකාශ කළ යුතු යි.

(ආ) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)$ සහ $g(x) = \log_{10}(4-x)$ යැයි සිතමු ; මෙහි x තාත්ත්වික වේ.

(i) f හි ත් g හි ත් වසම සොයා, ඒ නයින් $f+g$ හි වසම සොයන්න.

(ii) $f \circ g(-96)$ හි අගය කුමක් ද?

(ඇ) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ යන්න, $f(x) = 3x + n - nx$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වේ යැයි සිතමු ; මෙහි n යනු දී ඇති නිඛිලයකි.

(i) f එකට එක වීම

(ii) f මතට වීම

සඳහා, n හි අගයයන් සොයන්න.

තව ද, f හි ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය, එය පවතින විට සොයන්න.

2. (අ) $(x+y)^3(x-y) + (y+z)^3(y-z) + (z+x)^3(z-x)$ හි සාධක සොයන්න.

(ආ) α සහ β යනු $x^2 - bx + c = 0$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික මූල වේ. තව ද $\alpha \geq \beta$ වේ.

$\alpha - \beta = \sqrt{b^2 - 4c}$ බව පෙන්වන්න.

$(\alpha+1)$ සහ $(\beta+2)$ යනු $2x^2 - qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්, b සහ c ඇසුරෙන් q සහ r සොයන්න.

$\alpha = \beta$ විට, $q^2 = 4(2r+1)$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) a, b, c යනු $(a+1)(b+1)(c+1) \neq 0$ පරිදි වූ තාත්ත්වික නියත වන අතර,

$$x + y = az + xyz$$
$$y + z = bx + xyz$$
$$z + x = cy + xyz$$

වෙයි.

$(a+1)z = (b+1)x = (c+1)y$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, a, b, c සියල්ල ම ධන ද, $bc < 1$ ද, වන අවස්ථාවේ දී x, y සහ z සඳහා ඉහත සමීකරණ තුන විසඳන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. (අ) $\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|<1$ අසමානතාව විසඳන්න.

(ආ) n ධන නිඛිලයක් විට, $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණය, x හි බලවල ආරෝහණ පිළිවෙළට සැකසූ ශ්‍රේණියක් ලෙස ලියන්න.

(i) $(1+x)^{2n}$ හි සහ $(1+x)^n(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණ සැලකීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

$$\sum_{r=0}^{n} \left({}^nC_r\right)^2 = {}^{2n}C_n$$

බව පෙන්වන්න.

(ii) $\left(1-x^2\right)^n$ හි ප්‍රසාරණය භාවිත කිරීමෙන්, n ඔත්තේ විට, $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\left({}^nC_r\right)^2$ සොයන්න.

[${}^nC_r$ ට සුපුරුදු අර්ථය ඇත]

4. (අ) 0, 1, 2, 4, 7, 8 සංඛ්‍යාංක යොදා ගනිමින්, පුනරාවර්ත සංඛ්‍යාංක නොමැති වූ ද එක් එක් සංඛ්‍යාව 6000 ට වැඩි වූ ද එකිනෙකට වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ සෑදිය හැකි ද? (සාමාන්‍ය සම්මුතියට අනුව, සංඛ්‍යාවක ආරම්භක සංඛ්‍යාංකය 0 නොවේ.)

(ආ) එක්තරා පංතියක පිරිමි ළමයින් 7 ක් ද ගැහැනු ළමයින් 6 ක් ද සිටී. අඩුම වශයෙන් පිරිමි ළමයින් 3 දෙනෙකුවත් සිටින්නා වූ හරියටම 5 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කමිටුවක් සෑදිය හැකි ආකාර ගණන කවරේ ද?

[එක් එක් අවස්ථාවේ දී, ක්‍රමය පැහැදිලිව දක්විය යුතු ය.]

5. (අ) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිතයෙන්, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා,

$$1^2-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

බව සාධනය කරන්න.

(ආ) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වැනි පදය වන u_r යන්න $\frac{1}{r^2(r+2)(r+4)^2}$ වේ.

සෑම r ධන නිඛිලයක් සඳහා $u_r = f(r)-f(r+2)$ වන පරිදි වූ f ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

$$\sum_{r=1}^{n}\left[f(r)-f(r+2)\right]=\left[f(1)+f(2)\right]-\left[f(n+1)+f(n+2)\right]$$

බව පෙන්වන්න.

$\sum u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

6. (අ) $x \neq 1, -3, \dfrac{-5}{3}$ සඳහා,

$$f(x)=\frac{1}{|x-1|}\left(\frac{A}{x+3}-\frac{B}{3x+5}\right)$$

යැයි සිතමු ; මෙහි A සහ B නියත වේ.

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\dfrac{1}{32}$ වන පරිදි වූ A සහ B හි අගයයන් සොයන්න.

A සහ B හි ඉහත අගයයන් සඳහා, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ නිර්ණය කරන්න.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ පවතී ද?

(ආ) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ශ්‍රිතය,

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ; x<1\\ \dfrac{1}{x}-1 & ; 1\le x<2\\ (x+1)^2 & ; x\ge 2\end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

$x=1$ දී සහ $x=2$ දී g සන්තතික දැයි නිර්ණය කරන්න.

7. (අ) $x\ln y - y\ln x = 1$ නම් $x=1$ විට $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ආ) $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ නම් $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ශ්‍රිතය $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $x=\pi$ හි දී f හි අවකලනතාව පරීක්ෂා කරන්න.

$g(x)=(x-\pi)f(x)$ ශ්‍රිතය $x=\pi$ හිදී අවකල්‍ය ද නැත් ද යන්න ද නිර්ණය කරන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

8. $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ යැයි සිතමු.

(i) ඛණ්ඩාංක අක්ෂ ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද

(ii) උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍යවල (ඒවා තිබේ නම්) ඛණ්ඩාංක ද

(iii) $|x|$ හි විශාල අගයයන් සඳහා හැසිරීම ද

ගෙනහැර දක්වමින් $y = f(x)$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් අඳින්න.

f හි ප්‍රස්තාරය උපයෝගී කර ගනිමින්, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් ද අඳින්න.

ඒ නයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $e^x f(x) = 1$ සමීකරණයට අඩුම වශයෙන් තාත්ත්වික විසඳුම් දෙකක් වත් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{3} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$ සහ $\displaystyle\int \frac{10(x-4)}{x^2+1}\, dx$ සොයන්න.

$f : [0,7] \rightarrow \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} x \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & ; \ 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{10(x-4)}{x^2+1} & ; \ 3 < x \le 7 \end{cases}$$

යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

$\displaystyle\int_0^7 f(x)\, dx$ සහ $\displaystyle\int_0^7 |f(x)|\, dx$ අගයන්න.

$0 \le x \le 7$ සඳහා, $y = f(x)$ සහ $y = |f(x)|$ ප්‍රස්තාර අතර වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

10. (අ) $z = y - x$ ආදේශය භාවිත කිරීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $x = 0$ විට $y = 0$ යැයි දී ඇත්නම්,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{2x - 2y + 3}$$

අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) λ පරාමිතියක් විට, $y + 3 = \dfrac{\lambda}{x^2 - 4}$ වක්‍ර කුලය මගින් සපුරාලන අවකල සමීකරණයක් ලබාගන්න.

තව ද, ඉහත වක්‍ර කුලයේ ප්‍රලම්බ පරාවක්‍රයන් හි සමීකරණය ලබාගන්න